X. POUPARD

SOCIETE CENTRALE POUR
L'EQUIPEMENT DU TERRITOIRE

SERVICE TRANSPORT

4, Place Raoul Dautry
75741 - PARIS CEDEX 15

ORGANISATION DE DEMI-TOURS ET DE LIGNES A ANTENNES

Résumé et conclusion

Dans un certain nombre de réseaux d'autobus, une pratique courante consiste à organiser sur certaines lignes des services partiels (appelés encore " demi-tours " ou " services barrés "), c'est-à-dire à programmer au niveau de l'horaire théorique le fait que certains autobus n'effectuent pas de courses complètes, mais opèrent des retournements au niveau de terminus intermédiaires.

Cette pratique vise à offrir un niveau de service moins élevé sur les parties terminales de ces lignes, quand une chute du diagramme de charge sur ces tronçons l'autorise, et par là, soit à limiter les dépenses d'exploitation, soit à augmenter le niveau de service sur le tronçon principal de la ligne (selon que l'on se place à niveau de service constant sur ce tronçon principal, ou à moyens constants).

Les exploitants savent que la conception de l'horaire d'une ligne à antennes est nettement plus complexe que celle d'une ligne exploitée intégralement de " bout en bout ". Des alternatives se présentent (graphiques en " voitures indépendantes " ou en " dents de scie "), parmi lesquelles le choix n'est pas évident ; et les intervalles obtenus ne sont pas nécessairement satisfaisants dans les différentes solutions.

Par ailleurs, l'ampleur du gain en moyens d'exploitation (ou de l'amélioration du niveau de service sur le tronçon principal) n'est pas toujours immédiatement perceptible.

Une approche rationnelle du problème du demi-tour est donc nécessaire, aussi bien en termes de faisabilité que de rentabilité.

Par ailleurs, une telle approche concerne également l'organisation des lignes à antennes, pratique encore plus répandue, et dont l'analyse est tout à fait comparable à celle des lignes à demi-tours.

Le présent rapport constitue à la fois un premier élément de recherche sur cette question, et un relevé de conclusions directement utilisables par les exploitants. Il a par ailleurs été complété par la conception d'un programme informatique destiné à l'assistance à l'élaboration du graphique des lignes à demi-tours ou à antennes.

Premier élément de recherche seulement, car il adopte en première approche un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (les temps de parcours et le niveau de service sont supposés constants pendant au moins une grande révolution), et il n'approfondit que les problèmes de demi-tours à raison d'une voiture sur deux.

Conclusions opérationnelles toutefois, car il confirme ou rectifie un certain nombre d'idées reçues. Ainsi :

- il montre que l'injonction d'une voiture supplémentaire n'améliore pas toujours le niveau de service sur une ligne à demi-tours (cf. chapitre 3 : Recherche du meilleur service au moindre coût) ;

- il montre que l'organisation de demi-tours n'améliore pas toujours la rentabilité et l'efficacité du service, et définit des critères d'appréciation à cet effet (cf. chapitre 5 : Est-il toujours intéressant d'organiser des demi-tours ?) ;

- il montre qu'on n'a pas toujours le choix entre une solution en " voitures indépendantes " et une solution en " dents de scie " et que la seconde est parfois imposée, et il précise dans quel cas (cf. chapitre 7 : solutions en voitures indépendantes) ;

- il propose une méthode permettant d'apprécier rapidement, avant même de graphiquer, si les solutions possibles sont satisfaisantes sur le plan de la répartition des intervalles (cf. chapitre 8 : Discussion des solutions en voitures indépendantes, et chapitre 9 : Solution en dents de scie) ;

- il examine la marche à suivre au cas où les solutions obtenues ne sont pas satisfaisantes (cf. chapitre 10 : Solutions dégradées) ;

- il évoque enfin rapidement l'application spécifique de cette démarche dans le cas des lignes à antennes (cf. chapitre 11).

On trouvera en annexe des exemples des premières sorties fournies par le programme informatique évoqué plus haut, qui permet de répondre automatiquement à un certain nombre de questions résolues dans les chapitres 3, 7 et 8, 9 (Combien d'autobus utiliser ? Quel type de graphique réaliser Quels intervalles et quels battements sont possibles ?) et de tracer automatiquement des exemples de graphiques de ligne.

1/ Position du problème

Considérons une ligne d'autobus AB et supposons qu'il soit possible d'organiser, à l'approche du terminus B, des demi-tours au niveau d'un terminus intermédiaire C.

Le problème posé est le suivant : disposant a priori d'un nombre d'autobus N en service sur la ligne, est-il possible de bâtir un tableau de marche en alternant de manière régulière les courses " complètes " et les courses " partielles " ? Quelles sont les caractéristiques du service auquel on est conduit ? Que donne la comparaison entre ce service et celui qu'on obtiendrait sans organiser de demi-tours ?

Pour simplifier le problème, on suppose qu'on se place pendant une période suffisamment longue pour que :

- d'une part le niveau de service, caractérisé notamment par le grand intervalle entre deux courses de même type, reste constant ;

- d'autre part, les temps de parcours et les temps de battements minima à retenir, restent également constants ; ces temps sont supposés obtenus par la méthode préconisée par G. AMAR (cf. "Temps de battement et fiabilité de l'horaire " , revue Transports Publics n° 795 et 796, Juin/Juillet 1982)

Nature de la course	Notation du temps de parcours	Notation du battement minimum à l'issue de la course
AB	T_{AB}	B_{OB}
BA	T_{BA}	B_{OA}
AC	t_{AC}	b_{OC}
CA	t_{CA}	b_{OA}

On peut poser

$$\begin{cases} T = T_{AB} + T_{BA} \\ t = t_{AC} + t_{CA} \end{cases}$$

T et t sont les temps de rotation respectivement en rotation complète et en rotation partielle.

$$\begin{cases} RO = T + B_{0B} + B_{0A} \\ ro = t + b_{0C} + b_{0A} \end{cases}$$

RO et ro sont les temps de révolution minima en révolution complète ou en révolution partielle.

2/ Solutions en voitures indépendantes ou en dents de scie

Les graphiques 1 et 2 de la planche I représentent les deux familles de solutions envisageables a priori, dans le cas où on choisit d'alterner à raison d'une course sur deux les courses complètes et les courses partielles :

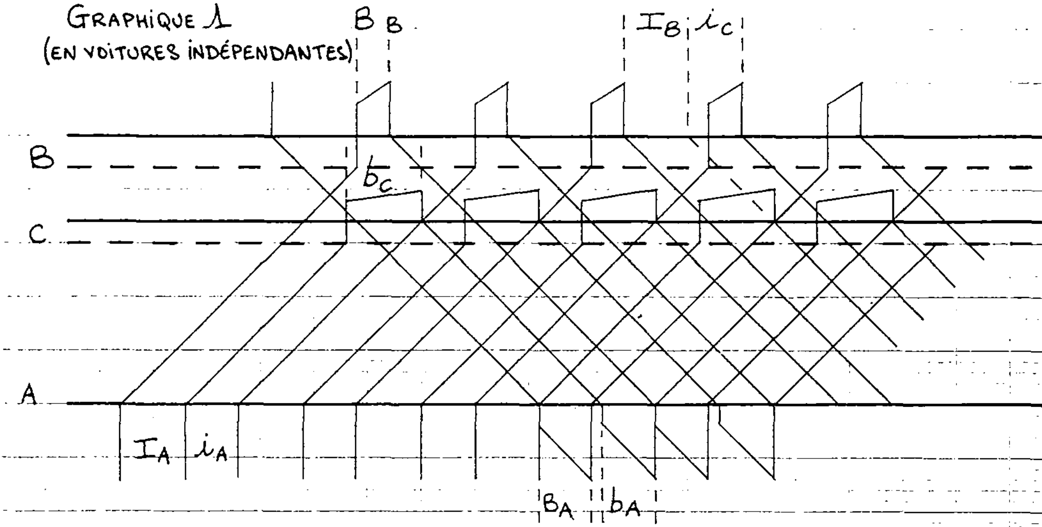
- dans les solutions de type 1, on graphique en "voitures indépendantes", c'est-à-dire que chaque autobus tourne exclusivement soit sur des révolutions complètes, soit sur des révolutions partielles,

- dans les solutions de type 2, on graphique en " dents de scie ", c'est-à-dire que chaque autobus effectue alternativement une révolution complète puis une révolution partielle.

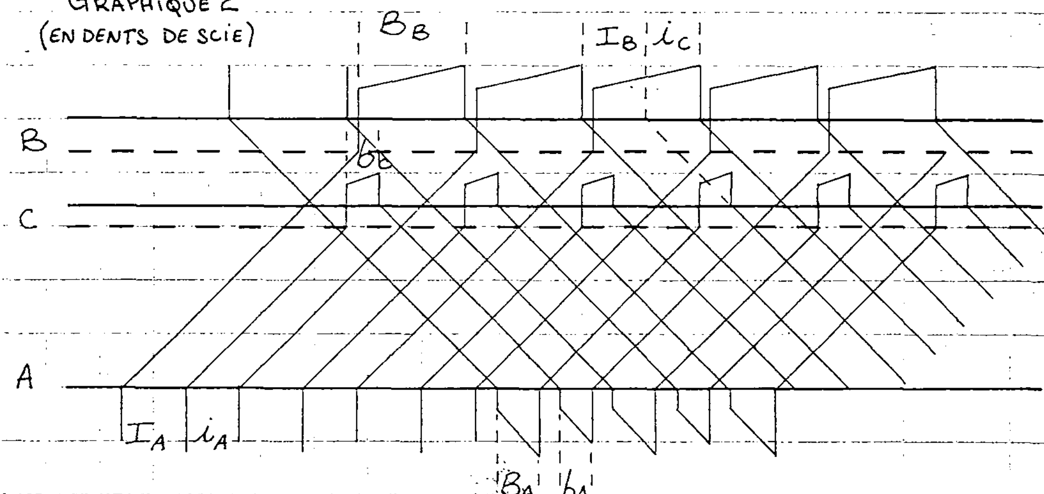
Notons de la manière suivante les variables caractéristiques d'une solution, (qui sont d'ailleurs les mêmes dans les deux cas) :

nature de la course	Notation de l'intervalle qui suit la course	Notation du battement à l'issue de la course	Notation du temps de révolution
AB	I_A	B_B	$R = T + B_B + B_A$
BA	I_B	B_A	
AC	i_A	b_C	$r = t + b_C + b_A$
CA	i_C	b_A	

GRAPHIQUE 1
(EN VOITURES INDÉPENDANTES)



GRAPHIQUE 2
(EN DENTS DE SCIE)



Quel que soit le type de graphique, on constate que dans une solution donnée, les variables d'intervalle sont liées par la relation :

$$\boxed{I_A + i_A = I_B + i_C = I}$$

I étant le grand Intervalle qui sépare 2 courses de même nature

En voitures indépendantes, le nombre de voitures N est la somme des voitures mises en oeuvre indépendamment sur les courses complètes et les courses partielles. Donc $N = \frac{R}{I} + \frac{r}{I}$

En dents de scie, tout se passe comme si chaque voiture effectuait une grande révolution de durée (R + r), avec un intervalle de I entre chaque voiture. Donc $N = \frac{R + r}{I}$

Dans tous les cas, on peut écrire :

$$\boxed{R + r = NI}$$

Les deux familles de solutions diffèrent sur les points suivants :

a/ <u>Voitures indépendantes</u>

Dans ce cas, R et r sont tous deux des multiples entiers de I , et on peut poser :

$$R = n\,I \qquad r = (N - n)\,I \qquad \text{avec } n \text{ entier.}$$

Par ailleurs, les relations entre intervalles et battements s'écrivent :

$$\begin{cases} I_B = I_A + B_A - b_A + kI \\ i_C = i_A + b_A - B_A - kI \end{cases} \qquad \text{avec } k \text{ entier.}$$

b/ <u>Dents de scie</u>

Dans ce cas R est un multiple de I à I_A près et r un multiple de I à i_A près, ce qui peut s'écrire :

$$R = n\,I + I_A \qquad r = (N - n)\,I - I_A \qquad \text{avec } n \text{ entier}$$

Les relations entre intervalles et battements s'écrivent :

$$\begin{cases} I_B = i_A + B_A - b_A + kI \\ i_C = I_A + b_A - B_A - kI \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

Dans tous les cas, une solution éventuelle est donc caractérisée par sa nature (voitures indépendantes ou dents de scie) et par un ensemble de variables :

$$I,\ I_A,\ i_A,\ I_B,\ i_C,\ R,\ r,\ n\ ,\ k,\ B_A,\ b_A,\ B_B,\ b_C$$

liées entre elles par les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c} I = I_A + i_A = I_B + i_C \\ R = T + B_B + B_A \\ r = t + b_C + b_A \\ R + r = NI \end{array}}$$

Ainsi que, suivant le cas :

Voitures indépendantes	Dents de scie
$R = n\ I$	$R = n\ I + I_A$
$r = (N - n)\ I$	$r = (N - n)\ I - I_A$
$I_B = I_A + B_A - b_A + kI$	$I_B = i_A + B_A - b_A + kI$
$i_C = i_A + b_A - B_A + kI$	$i_C = I_A + B_A - b_A - kI$

ces variables devant par ailleurs dans tous les cas vérifier

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leqslant I_A,\ i_A,\ I_B,\ i_C \leqslant I \\ B_A \geqslant B_{0A} \quad B_B \geqslant B_{0B} \quad b_A \geqslant b_{0A} \quad b_C \geqslant b_{0C} \end{array}}$$

3/ Recherche du meilleur service au moindre coût

A nombre de voitures N donné, on souhaite a priori optimiser le niveau de service, c'est-à-dire minimiser l'intervalle I, ce qui revient à minimiser $R + r = NI$

On choisira donc pour$(R + r)$ le plus petit multiple entier de N supérieur ou égal à$(R0 + ro)$

Autrement dit, on choisira I tel que :

$$\boxed{R0 + ro \leqslant NI < R0 + ro + N}$$

Cette condition sera appelée par la suite **critère d'optimisation de l'intervalle.**

Pour N donné, I est donc identique pour toutes les solutions répondant à ce critère, quel que soit leur type.

Posons $S = R + r$ et $S0 = R0 + ro$; on appellera respectivement S et S0 temps de révolution total et temps de révolution minimum total.

Dans le tableau 1 on a figuré, pour trois valeurs différentes de S0 , et pour des valeurs de N croissant de 1 à 30, les valeurs possibles de S et I répondant au critère d'optimisation de l'intervalle.

La quantité $D = S - S0$ qui figure également dans le tableau 1 représente le supplément de battement imposé par les paramètres du graphique dans les types de solution retenus (c'est-à-dire avec une répartition égale du nombre de courses vers les deux terminus).

L'examen du tableau 1 montre qu'à partir d'un certain nombre de voitures, le grand intervalle I n'est pas nécessairement amélioré quand on augmente le nombre de voitures d'une ou plusieurs unités.

En conséquence, avec par exemple S0 = 108', il est a priori absurde d'essayer de graphiquer avec 25 voitures conduisant à un grand intervalle I = 5', respectant pourtant le critère d'optimisation de l'intervalle, puisqu'on peut obtenir le même intervalle avec 22 voitures seulement (sous réserve qu'il existe bien des solutions avec 22 voitures, et qu'elles conduisent à des caractéristiques d'exploitation satisfaisantes).

Pour S0 donné, on remarque que pour une valeur donnée de I , dans la suite des nombres de voitures $N_1 < N_2 \dots N_n$ telle que tous les couples (N_i , I) respectent bien le critère d'optimisation de l'intervalle, seul le

Tableau 1

	$T_{AB} = 22'$, $B_{OB} = 3'$, $T_{BA} = 24'$, $B_{OA} = 4'$, $t_{AC} = 14'$, $b_{OC} = 3'$, $t_{CA} = 16'$, $b_{OA} = 3'$ — So = 89'			$T_{AB} = 27'$, $B_{OB} = 4'$, $T_{BA} = 29'$, $B_{OA} = 5'$, $t_{AC} = 17'$, $b_{OC} = 3'$, $t_{CA} = 19'$, $b_{OA} = 4'$ — So = 108'			$T_{AB} = 31'$, $B_{OB} = 5'$, $T_{OA} = 34'$, $B_{OA} = 5'$, $t_{AC} = 20'$, $b_{OC} = 4'$, $t_{CA} = 23'$, $b_{OA} = 4'$ — So = 126'		
N	S	I	D	S	I	D	S	I	D
1	89	89	0	108	108	0	126	126	0
2	90	45	1	108	54	0	126	64	0
3	90	30	1	108	36	0	126	42	0
4	92	23	3	108	27	0	128	32	2
5	90	18	1	110	22	2	130	26	4
6	90	15	1	108	18	0	126	21	0
7	91	13	2	112	16	4	126	18	0
8	96	12	7	112	14	4	128	16	2
9	90	10	1	108	12	0	126	14	0
10	90	9	1	110	11	2	130	13	4
11	99	9	10	110	10	2	132	12	6
12	96	8	7	108	9	0	132	11	6
13	91	7	2	117	9	9	130	10	4
14	98	7	9	112	8	4	126	9	0
15	90	6	1	120	8	12	135	9	9
16	96	6	7	112	7	4	128	6	2
17	102	6	13	119	7	11	136	8	10
18	90	5	1	108	6	0	126	7	0
19	95	5	6	114	6	6	133	7	7
20	100	5	11	120	6	12	140	7	14
21	105	5	16	126	6	18	126	6	0
22	110	5	21	110	5	2	132	6	6
23	92	4	3	115	5	7	138	6	12
24	96	4	7	120	5	12	144	6	18
25	100	4	11	125	5	17	150	6	24
26	104	4	15	130	5	22	130	5	4
27	108	4	19	108	4	2	135	5	9
28	112	4	23	112	4	6	140	5	14
29	116	4	27	116	4	10	145	5	19
30	90	3	1	120	4	14	150	5	24

premier N_1 répond à la condition

$$\boxed{(N - 1)\, I < S0}$$

puisqu'avec $(N - 1)$ voitures seulement, on ne peut pas adopter l'intervalle I .

Cette condition sera appelée par la suite **critère d'optimisation du nombre de voitures.**

Elle s'écrit encore :

$$NI - S0 < I$$

soit $$D < I$$

On remarque que pour une suite Ni , la valeur Di du battement improductif augmente de I pour chaque voiture supplémentaire. En particulier, on a toujours $D_2 \geqslant I$ puisque $D_1 \geqslant 0$.

On remarque en outre que D n'est nul que si S0 est une multiple de N ; ceci a d'autant plus de chances de se produire que N est faible, et que S0 est un produit de nombres entiers.

On a donc vu que pour S0 et N donnés, s'il existe toujours une valeur de I répondant au critère d'optimisation de l'intervalle :

$$S0 \leqslant Ni < S0 + N$$

cette valeur ne répond pas nécessairement au critère d'optimisation du nombre de voitures : $NI < S0 + I$

On remarque toutefois qu'une condition **suffisante** pour que ce dernier critère soit vérifié, est que $N \leqslant I$, qui peut encore s'écrire , puisque
$I < \frac{S0 + N}{N}$ et qu'on souhaite $I < \frac{S0}{N - 1}$

$$\frac{S0 + N}{N} \leqslant \frac{S0}{N - 1}$$

soit $$\boxed{N (N - 1) \leqslant S0}$$

Ainsi, dans les exemples du tableau 1 ,

pour	S0 = 89'	la condition suffisante	est vérifiée	jusqu'à	N = 9	inclus
pour	S0 = 108'	"	"	"	N = 10	"
pour	S0 = 120'	"	"	"	N = 11	"

ce qui est bien cohérent avec les valeurs de I qui figurent dans ce tableau.

Remarque : On remarque également que, pour S0 donné, en posant N_S = sup N répondant à la condition suffisante, les valeurs de N supérieures à N_S , et correspondant à des solutions respectant le critère d'optimisation du nombre de voitures, sont identiques à toutes les valeurs de I trouvées pour les N_S premières solutions, ce qui est logique.

Pour S0 donné, il y a seulement 2 N_S (1) valeurs de N pour lesquels on respecte le critère d'optimisation du nombre de voitures (en admettant que I peut descendre jusqu'à 1mn).

---

(1) $(2\,N_S - 1)$ si $N_S\,(N_S - 1) = S0$

4/ Répartition du niveau de service inégale entre les deux terminus

Pour N , R0 et ro donnés, on a donc vu qu'il n'est pas toujours possible de trouver des solutions avec répartition égale du niveau de service entre les deux terminus respectant à la fois les deux critères d'optimisation, d'une part de l'intervalle, d'autre part du nombre de voitures.

On peut naturellement se contenter de N_1 voitures avec $N_1 = \inf N_i$, N_i étant la suite de nombre de voitures conduisant tous au même intervalle I , et à laquelle appartient N . Cette solution est manifestement la plus économique et la plus rationnelle dans la plupart des cas.

Mais on peut aussi parfois souhaiter au contraire utiliser au maximum le nombre de voitures N donné, et améliorer globalement le niveau de service, par exemple en modifiant sa répartition entre les deux terminus.

Les graphiques des planches II et III montrent ainsi les différents cas de figure envisageables quand on répartit inégalement le niveau de service, ici par exemple à raison de :

- 1 course complète pour deux courses partielles (graphiques 1 à 3)
- 2 courses complètes pour une course partielle (graphiques 4 à 6)

Les graphiques 1 et 4 représentent des configurations en voitures indépendantes. Les graphiques 2-3 et 5-6 représentent des configurations en dents de scie (dans les graphiques 2-5, la course de type unique se raccorde à la première des deux courses de l'autre type ; dans les graphiques 3-6 , à la seconde).

Si on pose toujours I = le grand intervalle entre deux départs consécutifs de même type, on vérifie aisément

$NI = R + 2r$ dans les cas 1 - 2 - 3

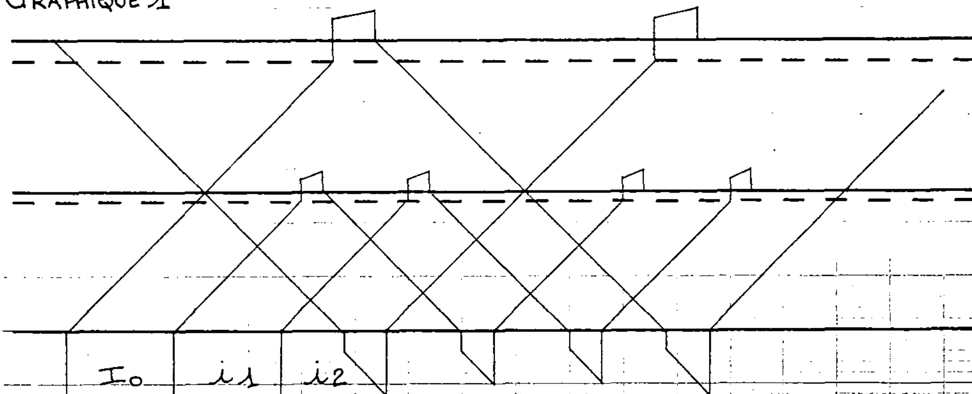
$NI = 2R + r$ dans les cas 4 - 5 - 6

Par ailleurs, on vérifie dans chaque cas des relations de congruence :

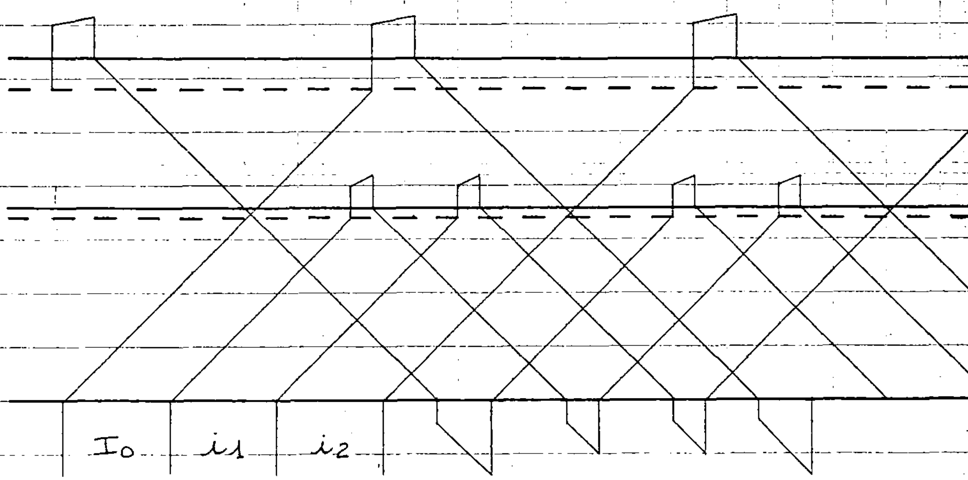
a/ en voitures indépendantes (cas 1 et 4), R et r sont des multiples entiers de I ,

b/ en dents de scie (cas 2-3 et 5-6), R et r sont des multiples entiers de I à une ou plusieurs quantités près, telles que figurées dans le tableau suivant :

GRAPHIQUE 1



GRAPHIQUE 2



GRAPHIQUE 3

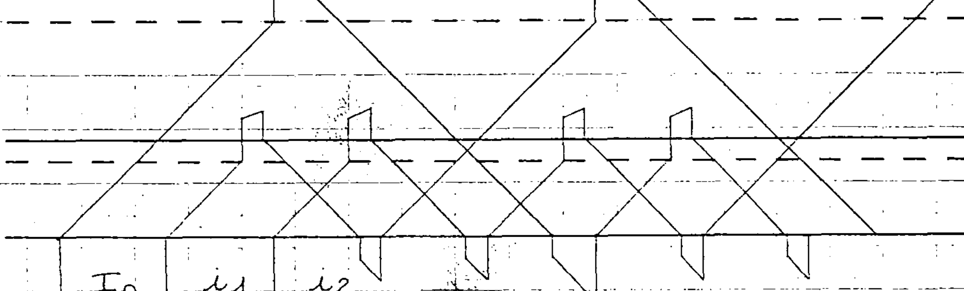
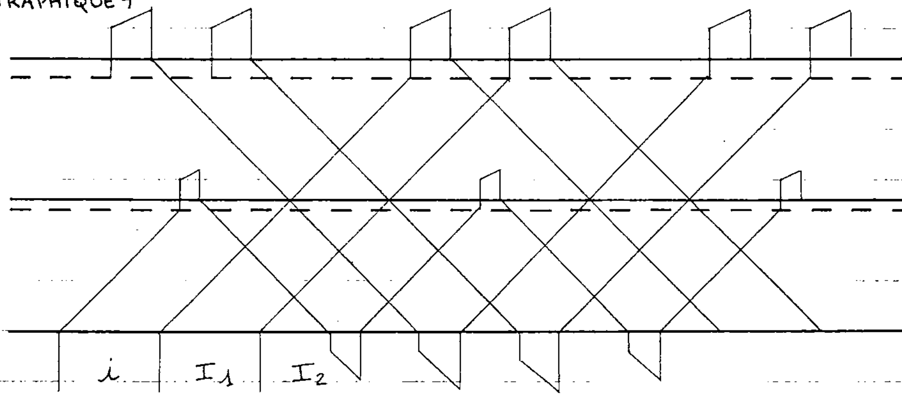
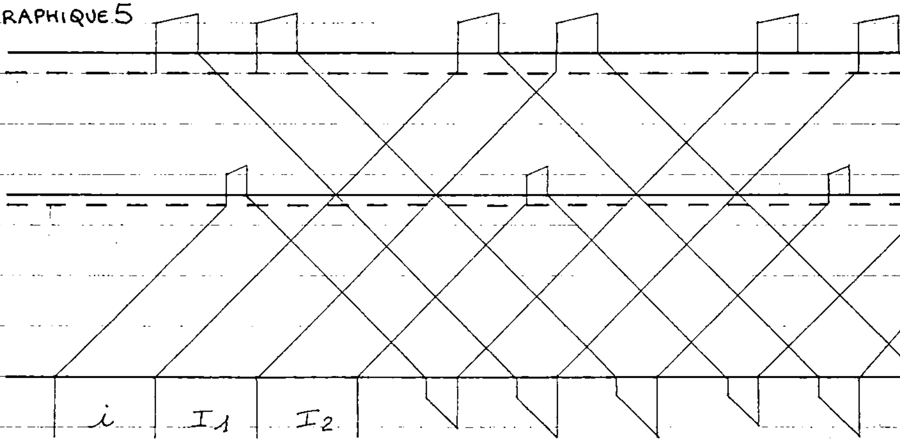


PLANCHE III

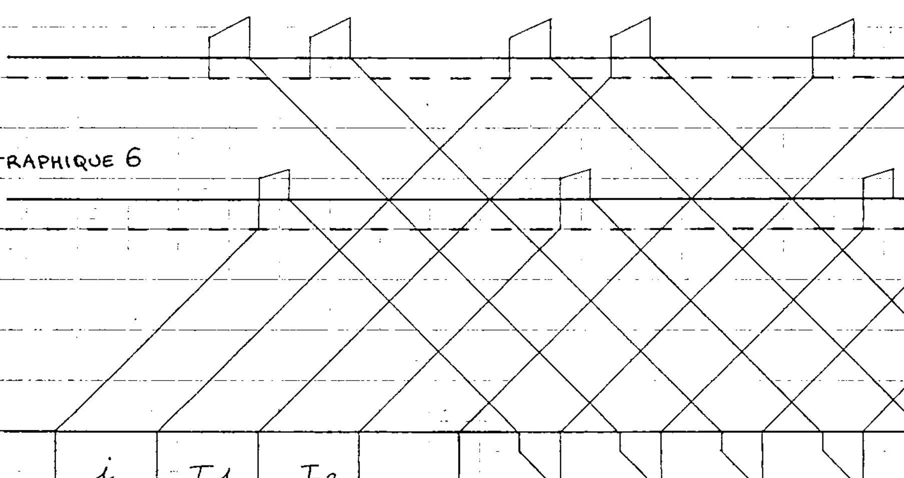
GRAPHIQUE 4



GRAPHIQUE 5



GRAPHIQUE 6



	Quantité congrue à R	Quantité congrue à r
cas 2	I_0	i_1 et i_2
cas 3	$- i_2$	$- I_0$ et $- i_1$
cas 5	I_1 et I_2	i
cas 6	$- I_1$ et $- i$	$- I_2$

Cette approche sur le cas déjà complexe d'une répartition 1/2 ou 2/1 entre courses complètes et courses partielles dans une séquence de courses régulières peut être généralisée.

En effet, avec une séquence régulière de a courses complètes et b courses partielles, et donc (a + b) courses différentes, avec un grand intervalle I entre deux courses identiques consécutives, on peut écrire :

$$NI = a R + b r$$

A cette condition s'ajoute à chaque fois un certain nombre de relations de congruence modulo I entre R et r d'une part, et les intervalles élémentaires séparant les courses d'autre part.

Ainsi, pour N , R0 et ro donnés, si on veut respecter à la fois le critère d'optimisation de l'intervalle et le critère d'optimisation du nombre de voitures avec une répartition égale du niveau de service entre les deux antennes, il suffit de choisir a et b tels que :

$$\boxed{N \ (N - 1) \leqslant a R0 + b ro}$$

et donc respectant la condition suffisante évoquée au paragraphe 3, pour être sûr qu'avec une répartition inégale de ce type on répond bien aux deux critères d'optimisation.

Notons toutefois qu'il peut très bien exister des valeurs de a , b ne respectant pas la condition suffisante et telles toutefois que le grand intervalle correspondant réponde bien aux deux critères.

5/ Est-il toujours intéressant d'organiser des demi-tours ?

Mais d'une manière générale, le niveau de service n'est amélioré, du moins sur le tronc commun, en passant d'une solution à l'autre, que si l'intervalle moyen l'est également, c'est-à-dire s'il diminue, donc si

$$\boxed{\frac{I_{ab}}{a + b} < \frac{I_{a0\ b0}}{a0 + b0}}$$

Le tableau 2 montre les intervalles obtenus dans l'exemple $S0 = 89'$ du tableau 1, en prenant des répartitions différentes de celles envisagées jusqu'à présent. On trouvera successivement dans ce tableau :

- des solutions où on choisit de ne pas organiser de demi-tours ($S0 = R0$),

- la solution à niveau de service également réparti ($S0 = R0 + ro$) ,

- des solutions à répartition inégale du type 2/1 ($S0 = 2R0 + ro$) ou 1/2 ($S0 = R0 + 2ro$) ,

- des solutions à répartition inégale du type 3/1 ($S0 = 3R0 + ro$) ou 1/3 ($S0 = R0 + 3ro$).

La première question à se poser est en effet la suivante : est-il vraiment intéressant d'organiser des demi-tours ?

Ainsi dans notre exemple, pour $N = 8$, 12 , 16 ,17 ou 24 , on obtient un aussi bon intervalle moyen en ne faisant que des courses complètes que si on avait un demi-tour toutes les deux courses.

En pratique, avec i et I tels que

$$R0 \leqslant Ni < R0 + N$$

$$R0 + ro \leqslant NI < R0 + ro + N$$

effectuer des demi-tours ne présente a priori d'intérêt que si

$$\boxed{I < 2i}$$

Tableau 2

N	Ro = 47'			Ro + ro = 89'			Ro + 2 ro = 131'			Ro + 3 ro = 173'			2 Ro + ro = 136'			3 Ro + ro = 183'		
	S	I	D	S	I	D	S	I	D	S	I	D	S	I	D	S	I	D
1	47	47	0	89	89	0	131	131	0	173	173	0	136	136	0	183	183	0
2	48	24	1	40	45	1	132	66	1	174	87	1	136	68	0	184	92	1
3	48	11	1	90	30	1	132	44	1	174	58	1	138	46	2	183	61	0
4	48	12	1	92	23	3	132	33	1	176	44	3	136	34	0	184	46	1
5	50	10	3	90	18	1	135	27	4	175	35	2	140	28	4	185	37	2
6	48	8	1	90	15	1	132	22	1	174	29	1	138	23	2	186	31	3
7	49	7	2	91	13	2	133	19	2	175	25	2	140	20	4	189	27	6
8	48	6	1	96	12	7	136	17	5	176	22	3	136	17	0	184	23	1
9		6		90	10	1	135	15	4	180	20	7	144	16	8	189	21	6
10	50	5	3	90	9	1	140	14	9	180	18	7	140	14	4	190	19	7
11		5			9		132	12	1	176	16	3	143	13	7	187	17	4
12	48	4	1	96	8	7	132	11	1	180	15	7	144	12	8	192	16	9
13		4		91	7	2		11		182	14	9	143	11	7	195	15	12
14		4			7		140	10	9	182	13	9	140	10	4	196	14	13
15		4		90	6	1	135	9	4	180	12	7		10		195	13	12
16	48	3	1		6			9		176	11	3	144	9	8	192	12	9
17		3			6		136	8	5		11		144	8	0	187	11	4
18		3		90	5	1		8		180	10	7		8			11	
19		3			5		133	7	2		10			8		190	10	7
20		3			5			7		180	9	7	140	7	4		10	
21		3			5			7			9			7		189	9	6
22		3			5		132	6	1	176	8	3		7			9	
23		3		92	4	3		6			8		138	6	2	184	8	1
24	48	2	1		4			6			8			6			8	

Cette condition sera appelée le critère d'opportunité pour l'organisation de demi-tours. Elle s'écrit encore, avec

$$NI = R0 + ro + D \quad \text{et} \quad Ni = R0 + d$$

$$D - 2d < R0 - ro$$

Remarque : Pour S0 donné, le critère d'opportunité a donc d'autant plus de chances d'être vérifié que l'écart entre les temps de révolution minima R0 et ro est important, ce qu'on pouvait imaginer.

La deuxième question concerne la comparaison entre les solutions à niveau de service égal et celles à niveau de service inégal.

Une solution à niveau de service inégal définie par (a, b) ne sera meilleure que la solution à niveau de service égal que si

$$\boxed{2 I_{ab} < (a + b) I}$$

Toujours dans le même exemple , le tableau 2 montre qu'il n'ya pas de relation apparente entre le fait qu'un couple (N , I) réponde à la fois aux deux critères d'optimisation, et le fait que le niveau de service moyen qu'il génère sur le tronc commun soit plus ou moins bon que celui d'une solution sans demi-tour, ou d'une solution avec répartition inégale du niveau de service.

Le type de solution le plus opportun est donc à examiner cas par cas, en fonction des différents critères évoqués, mais surtout des impératifs d'exploitation éventuels.

Remarque : Une recherche pour la détermination systématique des solutions répondant au critère d'opportunité pourrait toutefois être poursuivie :

- en faisant varier a et en ne retenant, pour a donné, que la plus petite valeur de b vérifiant la condition suffisante $2 I_{ab} < (a + b) I$;

- en recherchant également pour a donné, les éventuelles valeurs de b inférieures à cette plus petite valeur et respecant néanmoins le critère d'opportunité.

Les couples (a, b) ainsi obtenus devraient être en définitive en nombre assez limité.

6/ Approche pratique des solutions à niveau de service également réparti sur les deux terminus

Nous nous limiterons dans la suite de ce rapport aux solutions à niveau de service également réparti entre les courses complètes et les courses partielles.

On a vu que pour toute solution, en voitures indépendantes ou en dents de scie, qu'elle respecte ou non les critères d'optimisation, les variables de temps de révolution et de battements sont liées par les relations :

$$\begin{cases} R + r = S \\ R = T + B_B + B_A \\ r = t + b_C + b_A \end{cases}$$

avec $B_B \geqslant B_{0B}$ $\quad B_A \geqslant B_{0A}$ $\quad b_C \geqslant b_{0C}$ $\quad b_A \geqslant b_{0A}$

Toute solution en (R, r) doit donc vérifier

$$\begin{cases} R \geqslant T + B_{0B} + B_{0A} & \text{c.a.d.} \quad R \geqslant R0 \\ r \geqslant t + b_{0C} + b_{0A} & \text{c.a.d.} \quad r \geqslant ro \end{cases}$$

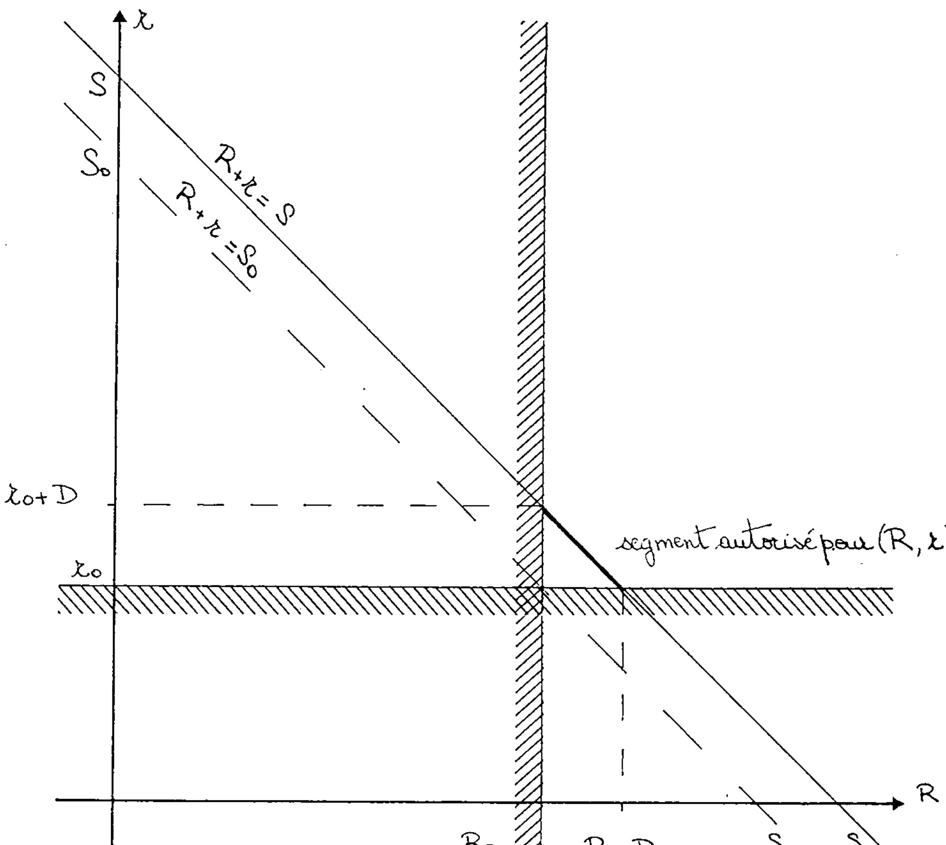
En conséquence, les seules solutions possibles en (R, r) pour (S ,I) donnés se trouvent sur le segment de la droite $R + r = S$ autorisé par les conditions $R \geqslant R0$ et $r \geqslant ro$

C'est ce que figure le schéma de la planche IV.

On doit donc toujours vérifier : $\quad R0 \leqslant R < R0 + D$

(ou encore $\quad ro \leqslant r < ro + D$, condition équivalente).

Si $D = 0$, c'est-à-dire si $S = S0$, le segment se réduit au seul point de coordonnées $(R, r) = (R0, ro)$.


r
S
S_0
R+r= S
R+r =S_0
r_0+D
segment autorisé pour (R, r)
r_0
R
R_0
R_0+D
S_0
S

7/ Solutions en voitures indépendantes

A priori, il est toujours préférable de rechercher en priorité des solutions en " voitures indépendantes ". Elles donnent en effet une plus grande souplesse d'exploitation, en particulier pour tout ce qui est action de régulation.

S et I étant fixés, les solutions en voitures indépendantes sont caractérisées par le fait que R est un multiple entier de I . On recherchera donc toutes les valeurs $R_1 < R_2 \ldots. Rn$

telles que $R_i = n\ I$ avec $R0 \leqslant Ri < R0 + D$.

Le tableau 3 figure, en reprenant dans les exemples précédents le cas S0 = 89' , les solutions (R, r) en voitures indépendantes en fonction du nombre de voitures, dans trois exemples de répartition du temps de révolution minimal total entre les deux types de courses.

On constate que pour la suite Ni de nombres de voitures pour lesquels le critère d'optimisation de l'intervalle conduit au même intervalle I , le nombre de solutions (R, r) en voitures indépendantes augmente d'une unité en même temps que N . Ceci est normal puisque le segment [R0, R0 + D] s'allonge à chaque fois d'une longueur I.

Par ailleurs, il n'y a pas nécessairement de solution (R, r) en voitures indépendantes pour $N = N_1$ répondant au critère d'optimisation du nombre de voitures. C'est par exemple ce qui est figuré sur le schéma de la planche V, où on a représenté, pour (R0, ro) = (53,36), toutes les solutions en (R, r) répondant au critère d'optimisation de l'intervalle pour I = 5' , donc de N = 18 à 22 voitures. On constate qu'il n'y a pas de solution en voitures indépendantes pour N = 18 voitures.

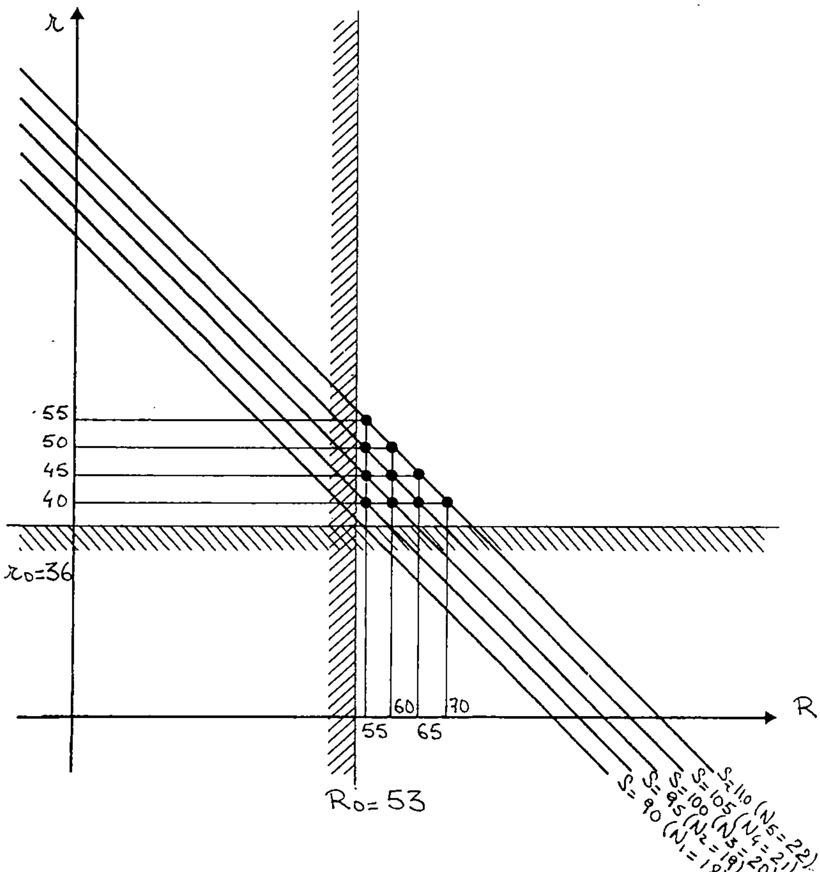
En outre, pour $N = N_1$, il y a au plus une solution en voitures indépendantes, puisqu'alors $D < I$.

Tableau 3

So = 89'				T_{AB} = 19' B_{OA} = 3' T_{BA} = 21' B_{OA} = 4' t_{AC} = 17' b_{OC} = 3' t_{CA} = 19' b_{OA} = 3' (Ro,ro) = (47',42')	T_{AB} = 22' B_{OB} = 3' T_{BA} = 24' B_{OA} = 4' t_{AC} = 14' b_{OC} t_{CA} = 16' b_{OA} = 3' (Ro,ro) = (53,36)	T_{AB} = 24' B_{OB} = 4' T_{BA} = 27' B_{OB} = 4' t_{AC} = 11' b_{OC} = 2' t_{CA} = 14' b_{OA} = 3' (Ro,ro) = (59,30)
N	S	I	D	(R , r)	(R , r)	(R , r)
1	89	89	0	/	/	/
2	90	45	1	/	/	/
3	90	30	1	/	/	(60,30)
4	92	23	3	/	/	/
5	90	18	1	/	(54,36)	/
6	90	15	1	/	/	(60,30)
7	91	13	2	/	/	/
8	96	12	7	(48,48)	(60,36)	(60,36)
9	90	10	1	/	/	(60,30)
10	90	9	1	/	(54,36)	/
11	99	9	10	(54,45)	(54,45) (63,36)	(60,39)
12	96	8	7	(48,48)	(56,40)	(64,32)
13	91	7	2	(49,42)	/	/
14	98	7	9	(49,49) (56,42)	(56,42)	(63,35)
15	90	6	1	(48,42)	(54,36)	(60,30)
16	96	6	7	(48,48) (54,42)	(54,42 (60,36)	(60,36) (66,30)
17	102	6	13	(48,54) (54,48) (60,42)	(54,48) (60,42) (66,36)	(60,42) (66,36) (72,30)
18	90	5	1	/	/	(60,30)
19	95	5	6	(50,45)	(55,40)	(60,35) (65,30)
20	100	5	11	(50,50) (55,45)	(55,45) (60,40)	(60,40) (65,35) (70,30)
21	105	5	16	(50,55) (55,50) (60,45)	(55,50) (60,45) (65,40)	(60,45) (65,40) (70,35) (75,30)
22	110	5	21	(50,60) (55,55) (60,50) (65,45)	(55,55) (60,50) (65,45) (70,40)	(60,50) (65,45) (70,40) (75,35) (80,30)
23	92	4	3	(48,44)	(56,36)	/
24	96	4	7	(48,48) (52,44)	(56,40) (60,36)	(60,36)

PLANCHE V

Organsiation de Demi-Tours et de Lignes à Antennes .... par X. Poupard



Les solutions en voitures indépendantes possibles à priori pour (R, r) sont représentées par des points figurés sur les droites S = 90' à 110' et dont les coordonnées sont des multiples entiers de l'intervalle I = 5'

8/ Discussion des solutions en voitures indépendantes

Supossons qu'avec (S , I) donnés, il existe des solutions en voitures indépendantes.

Plaçons nous en outre dans un cas ou $N = N_I$ et donc $D < I$ puisque, comme on l'a dit plus haut, il est à priori absurde de graphiquer avec un nombre de voitures ne répondant pas au critère d'optimisation du nombre de voitures.

On a donc $R = nI$ et $r = (N - n)\ I$

Comme $I_A + i_A = I_B + i_C = I$

il suffit de vérifier $0 \leqslant I_A\ ,\ I_B \leqslant I$ pour vérifier $0 \leqslant i_A\ ,\ i_C \leqslant I$.

> Ceci est d'ailleurs valable quelque soit le type de solution, et quelle réponde ou non aux critère d'optimisation. On se contentera donc dans tous les cas de vérifier $0 \leqslant I_A\ ,\ I_B \leqslant I$

Par ailleurs, les solutions doivent vérifier

$$B_A \geqslant B_{0A} \qquad B_B \geqslant B_{0B} \qquad b_C \geqslant b_{0C} \qquad b_A \geqslant b_{0C}$$

sachant que, en voitures indépendantes

$$\begin{cases} I_B = I_A + B_A - b_A + kI \\ R = T + B_B + B_A \\ r = t + b_C + b_A \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer

$$\begin{cases} b_A = B_A + I_A - I_B + kI \\ B_B = - B_A + R - T \\ b_C = - B_A - I_A + I_B - kI + r - t \end{cases}$$

Les conditions sur les battements s'écrivent donc

$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant B_A \leqslant R - T - B_{0B} \\ b_{0A} - I_A + I_B - kI \leqslant B_A \leqslant r - t - b_{0C} + I_B - I_A - kI \end{cases}$$

et on ne trouvera de B_A répondant à la question que si :

$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant r - t - b_{0C} + I_B - I_A - kI \\ b_{0A} + I_B - I_A - kI \leqslant R - T - B_{0B} \end{cases}$$

soit $$T - R + B_{0B} + b_{0A} - kI \leqslant I_A - I_B \leqslant r - t - B_{0A} - b_{0C} - kI$$

ou $$R0 - R - B_{0A} + b_{0A} - kI \leqslant I_A - I_B \leqslant r - ro - B_{0A} + b_{0A} - kI$$

ou encore, en posant $B0 = B_{0A} - b_{0A}$

$$R0 - R - B0 - kI \leqslant I_A - I_B \leqslant r - ro - B0 - kI$$

en remplaçant R par nI et r par $S - nI$, et en posant $q = - n - k$

il vient $$R0 - B0 + qI \leqslant I_A - I_B \leqslant S - ro - B0 + qI$$

soit $$R0 - B0 + qI \leqslant I_A - I_B \leqslant R0 + D - B0 + qI$$

En définitive, les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une solution en (B_A, B_B, b_A, b_C) s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leqslant I_A, I_B \leqslant I \\ \text{il existe } q \text{ tel que } R0 - B0 + qI \leqslant I_A - I_B \leqslant R0 + D - B0 + qI \end{array}}$$

Le schéma de la planche VI montre la résolution graphique du problème

- on trace le carré des valeurs limites de I_A et I_B : 0 et I ,

PLANCHE VI

$T_{AB} = 22'$ $B_{0B} = 3'$

$T_{BA} = 25'$ $B_{0A} = 4'$

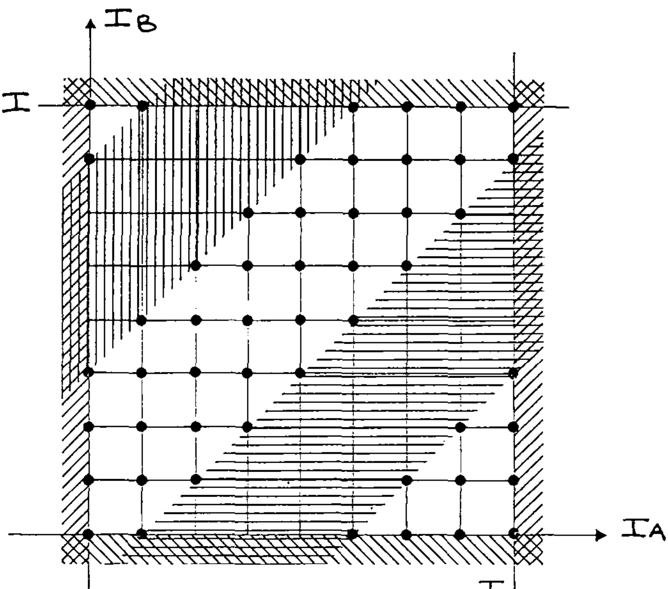
$t_{AC} = 15'$ $b_{0C} = 3'$

$t_{CA} = 17'$ $b_{A0} = 33'$ $B_0 = 1'$

$S0 = 92'$ $(R0, ro) = (54,38)$

$N = 12$ $S = 96'$ $I = 8'$ $D = 4'$

Solution en voitures indépendantes $(R , r) = (56,40)$ donc $n = 7$



$R0 - B_0 = 53'$

$R0 - B_0 + D = 57'$

Les droites d'équation $I_A - I_B = R0 - B_0 + q\,I$ et $I_A - I_B = R0 + D - B_0 + qI$

qu'on a tracées correspondent à des valeurs de q variant entre -8 et -6

- on trace tous les couples de droite d'équation

$$\begin{cases} I_A - I_B = R0 - B0 + qI \\ I_A - I_B = R0 + D - B0 + qI \end{cases}$$

qui coupent effectivement ce carré, et on exclut les valeurs de (I_A , I_B) ne répondant pas à la condition d'existence d'une solution pour au moins une valeur de q .

En pratique, il y a au plus 4 droites qui coupent le carré puisque la distance entre deux couples de droites, c'est-à-dire entre deux droites de même type dans deux couples différents, pour q différent d'une unité, est égale à la demi-diagonale du carré.

Par ailleurs, la largeur des bandes autorisées est proportionnelle à D (qui est la projection de cette largeur sur l'un quelconque des deux axes). Il y a donc toujours des solutions, et il y en a d'autant plus que le battement improductif est important.

A l'opposé, si D = 0 , les solutions possibles en (I_A , I_B) se réduisent à la droite d'équation $I_A - I_B = - B0$, ce qui fournit $I - | B0 |$ solutions en (I_A , I_B) en variables entières.

Remarquons bien que, comme on s'est placé dans le cas de solutions vérifiant le critère d'optimisation du nombre de voitures, c'est-à-dire avec $0 \leqslant D < I$, il n'y a jamais chevauchement entre deux couples de droite.

> A l'inverse, toute la discussion précédente reste valable dans les cas où $D \geqslant I$. Il y a alors chevauchement entre les couples de droites, et il est donc toujours possible de trouver une valeur de q respectant la condition d'existence d'une solution pour toute valeur de (I_A , I_B) située dans le carré [0 , I] .
>
> En conclusion, tout couple de valeurs (I_A , I_B) fournit des solutions en voitures indépendantes quand on ne respecte pas le critère d'optimisation du nombre de voitures. Le résultat est intéressant et sera utilisé par la suite. (cf chapitre 10 : Solutions dégradées)

On a donc toujours trouvé des solutions en (I_A , I_B), même en nombre limité, en voitures indépendantes, tout en respectant les critères d'optimisation.

Toutefois, ces solutions ne sont pas nécessairement satisfaisantes.

En effet, on peut souhaiter que, dans le sens de charge, l'intervalle suivant une course complète soit supérieur à celui suivant une course partielle, ceci afin d'assurer un remplissage correct de toutes les voitures, et éviter en particulier les surcharges sur les courses complètes.

Ceci limite donc les solutions en (I_A , I_B) aux rectangles définis respectivement par $I_A \geqslant \frac{I}{2}$ ou $I_B \geqslant \frac{I}{2}$, suivant le sens de charge ; ou encore au carré supérieur droit respectant ces deux conditions, si l'on veut assurer cet effet dans les deux sens.

Par ailleurs, si les solutions en (I_A , I_B) s'approchent trop près des bords du carré [0 , I] , les intervalles suivant les navettes deviennent très faibles, ce qui n'est en général pas souhaitable (à moins de chercher délibérément des " doublages ").

On peut encore souhaiter que les intervalles suivant les partiels soient identiques à ceux suivant les courses complètes, pour avoir un service parfaitement régulier. Seuls les points situés au centre du carré, ou à son voisinage immédiat, conviennent alors, et il n'y a pas de solution satisfaisante si cette zone est hachurée.

Une fois donc déterminé l'espace autorisé pour (I_A , I_B) , il convient donc de vérifier qu'il existe bien une solution satisfaisante au regard des contraintes d'exploitation qu'on se fixe par ailleurs.

Si une telle solution n'existe pas, il convient alors de se tourner à priori vers des solutions en dents de scie (cf. chapitre 9).

Une configuration intéressante existe dans le cas où la droite d'équation $I_A - I_B = 0$ est incluse dans la zone autorisée, c'est-à-dire si

il existe q tel que $R0 - B0 + qI \leqslant 0 \leqslant R0 + D - B0 + qI$

soit $R0 + qI \leqslant B0 \leqslant R0 + D + qI$

Dans ce cas, on peut en effet toujours trouver des solutions telles que les intervalles suivant chaque type de course soient identiques dans les deux sens, et en particulier des solutions proches du centre du carré.

Supposons qu'on a choisi une solution satisfaisante en (I_A , I_B). On sait alors qu'il existe un ensemble non vide de solutions en (B_A , b_A , B_B ; b_C) correspondantes, vérifiant bien les conditions limites pour ces battements.

Cet ensemble est déterminé par les relations

$$\begin{cases} B_A - b_A = I_B - I_A - kI \\ B_B + B_A = R - T \\ b_C + b_A = r - t \end{cases}$$

avec $B_B \geqslant B_{0B}$ $\quad B_A \geqslant B_{0A}$ $\quad b_C \geqslant b_{0C}$ $\quad b_A \geqslant b_{0A}$

ce qui peut encore s'écrire

$$B_A - b_A = I_B - I_A + (q + n) \quad I$$

avec
$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant B_A \leqslant R - T - B_{0B} \\ b_{0A} \leqslant b_A \leqslant r - t - b_{0C} \end{cases}$$

ou encore
$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant B_A \leqslant B_{0A} + R - R0 \\ b_{0A} \leqslant b_A \leqslant b_{0A} + r - ro \end{cases}$$

Le schéma de la planche VII figure la résolution graphique du problème toujours dans le même exemple que le schéma 3, mais en choissant des valeurs particulières pour I_A et I_B .

En pratique, la droite d'équation $B_A - b_A = I_B - I_A + (q + n) \; I$ coupe donc toujours le rectangle des valeurs limites de B_A et b_A .

Ce rectangle se ramène au point (B_{0A} , b_{0A}) si D = 0.

Le graphique de la planche VIII montre le résultat final obtenu avec un choix de (B_A , b_A) parmi les deux possibilités que fournit le schéma de la planche VII.

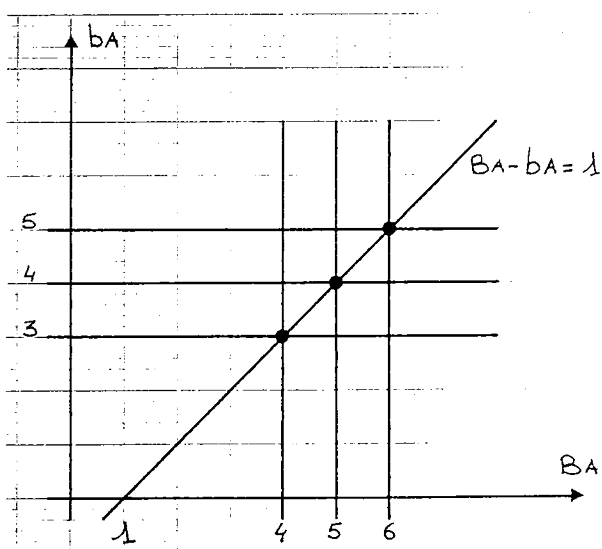
PLANCHE VII

$I_A = 4'$ $I_B = 5'$ donc $q = -7$

$q + n = -7 + 7 = 0$ donc $B_A - b_A = I_B - I_A = 1'$

$B_{0A} \leqslant B_A \leqslant B_{0A} + R - R0$ c'est-à-dire $4' \leqslant B_A \leqslant 6'$

$b_{0A} \leqslant b_A \leqslant B_{0A} + r - ro$ c'est-à-dire $3' \leqslant b_A \leqslant 5'$



Il est caractérisé par l'ensemble des éléments suivants :

Nombre de voitures : $N = 12$

Grand Intervalle $I = 8'$ $D = S - S0 = 4'$

Révolution totale $S = 96'$

Solution en voitures indépendantes :

. grande révolution $R = 56'$
. petite révolution $r = 40'$

$I_A = 4'$ $i_A = I - I_A = 4'$

$I_B = 5'$ $i_C = I - I_B = 3'$

$B_A = 6'$

$b_A = 5'$

$B_B = R - T - B_A = 56 - 47 - 6 = 3'$

$b_C = r - t - b_A = 40 - 32 - 5 = 3'$

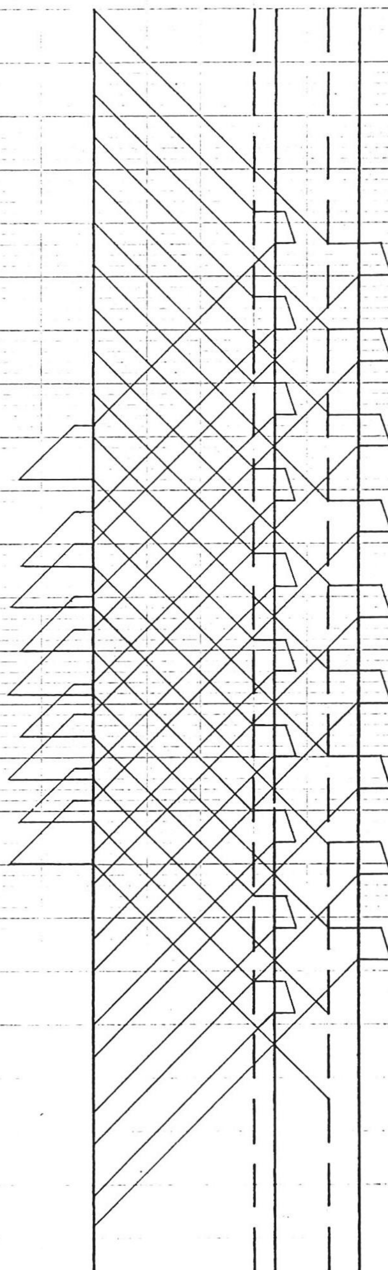


PLANCHE VIII

9/ Solutions en dents de scie

Comme dans le cas de solution en voitures indépendantes, plaçons nous à priori dans les cas où $N = N_1$ et donc où $D < I$. On peut alors toujours trouver dans ces cas, des solutions en dents de scie.

En effet, à toute valeur de R dans l'intervalle $[\ R0\ ,\ R0 + D\ ]$, on peut associer une valeur de I_A unique vérifiant

$$R = nI + I_A \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant I_A < I$$

En revanche, pour I_A fixé, il n'existe de solution que si

il existe n tel que $\quad R0 \leqslant I + I_A \leqslant R0 + D$

autrement dit, en posant $K = -n$, s'il existe K tel que

$$\boxed{R0 + KI \leqslant I_A \leqslant R0 + D + KI} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant I_A < I$$

I_A ne peut donc prendre que D valeurs sur une réunion d'au plus deux intervalles de type $[\ R0 + KI\ ,\ R0 + D + KI\ ]$

Par ailleurs
$$\begin{aligned} I_B &= i_A + B_A - b_A + kI \\ &= I - I_A + B_A - b_A + kI \end{aligned}$$
$$\text{soit} \quad I_A + I_B = B_A - b_A + (k+1)\ I$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} R = T + B_B + B_A \\ r = t + b_A + b_C \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} b_A = B_A + I - I_A - I_B + kI \\ B_B = -B_A + R - T \\ b_C = -B_A + r - t - I + I_A + I_B - kI \end{cases}$$

Les conditions sur les battements s'écrivent

$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant B_A \leqslant R - T - B_{0B} \\ B_{0A} - I + I_A + I_B - kI \leqslant B_A \leqslant - b_{0C} + r - t - I + I_A + I_B - kI \end{cases}$$

et ne sont vérifiées que si

$$\begin{cases} B_{0A} \leqslant - b_{0C} + r - t - I + I_A + I_B - kI \\ b_{0A} - I + I_A + I_B - kI \leqslant R - T - B_{0B} \end{cases}$$

soit

$$B_{0A} + b_{OC} - r + t + (k + 1)\ I \leqslant I_A + I_B \leqslant R - T - B_{0B} - b_{0A} + (k + 1)\ I$$

comme $I_A = R - nI$ et en posant toujours $B0 = B_{0A} - b_{0A}$

il vient

$$B0 + ro - S + (k + 1 + n)\ I \leqslant I_B \leqslant B0 - R0 + (k - 1 + n)\ I$$

en posant $K' = K + 1 + n$ la condition s'écrit, indépendamment de R

il existe K' tel que $B0 + ro - S + K'\ I \leqslant I_B \leqslant B0 - R0 + K'I$

soit $\boxed{B0 - R0 - D + K'\ I \leqslant I_B \leqslant B0 - R0 + K'\ I}$

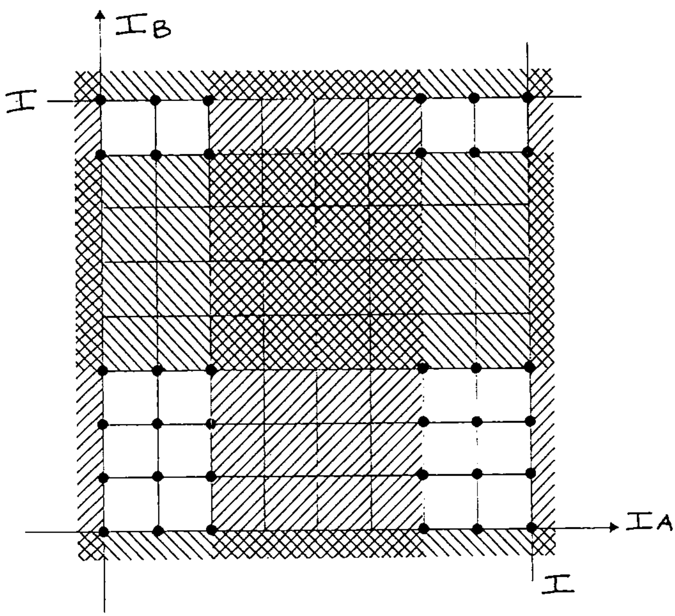
Comme I_A , I_B ne peut donc prendre que D valeurs sur une réunion d'au plus deux intervalles de type $[\ B0 - R0 - D + K'\ I\ ;\ B0 - R0 + K'I\ ]$.

Le schéma de la planche IX montre la résolution graphique du problème dans le même exemple que celui traité précédemment. On constate que les solutions possibles en (I_A , I_B) obtenues par un graphique en dents de scie sont à priori complètement différentes de celles qu'on obtient en voitures indépendantes.

Le nombre de solutions autorisées, égal à D^2 , dépend donc là encore de la marge de manoeuvre autorisée par les battements improductifs.

Pour $D = 0$, le nombre de solutions se réduit en revanche à une seule valeur (I_A , I_B) = ($R0 + KI$, $B0 - R0 + K'I$).

PLANCHE IX



RO = 54' $\quad$ B_0 - RO + D = 49'

RO + D = 58' $\quad$ B_0 - RO = -53'

les droites d'équation $\quad I_A$ = RO + KI et I_A = RO + D + KI

et $\quad I_B = B_0$ - RO + D + K'I et $I_B = B_0$ - RO + K'I

qu'on a tracées correspondent à des valeurs de K variant de - 7 à - 6

et de K' variant de 7 à 8.

Comme dans le cas de solutions en voitures indépendantes, les solutions possibles à priori en (I_A , I_B) ne conviennent pas nécessairement à une bonne organisation du service, ceci pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cas de voitures indépendantes (d'où la recherche de solutions "dégradées" qui sera exposée au chapitre 10).

A une solution en (I_A ; I_B), on peut associer des battements autorisés par leurs valeurs limites, soit

$$\begin{cases} B_A - b_A = I_A + I_B - (k + 1) I \\ B_B + B_A = R - T \\ b_C + b_A = r - t \end{cases}$$

or $K' = k + 1 + n$ et $K = - n$

donc $k = K + K' + 1$

et les conditions s'écrivent

$$\text{avec} \quad \boxed{\begin{array}{l} B_A - b_A = I_A + I_B - (K + K') I \\ B_{0A} \leqslant B_A \leqslant B_{0A} + R - R0 \qquad b_{0A} \leqslant b_A \leqslant b_{0A} + r - ro \end{array}}$$

sachant que $R = I + I_A = - KI + I_A$

$$r = S - R = S + KI - I_A$$

La droite d'équation $B_A - b_A = I_A + I_B - (K + K') I$ coupe toujours le rectangle des valeurs limites de B_A et b_A . Tous les couples entiers (B_A , b_A) se trouvant sur le segment de droite autorisé conviennent comme solution et on en déduit immédiatement B_B et b_C .

Le schéma de la planche X et le graphique de la planche XI illustrent les solutions possibles, toujours dans le même exemple, en prenant pour valeur de (I_A , I_B) le couple (6, 3).

Les solutions en (B_A , b_A) se réduisent ici en fait à un couple unique (4, 3).

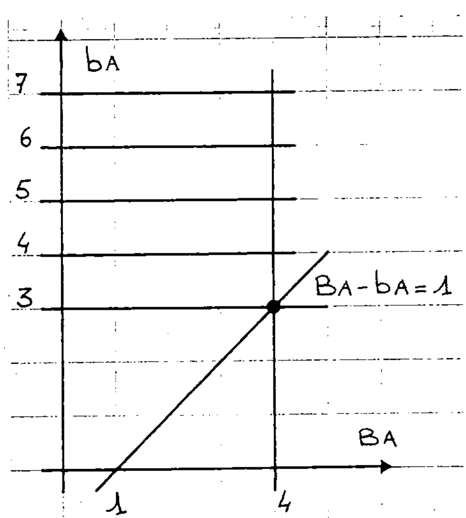
PLANCHE X

$I_A = 6'$ $\quad I_B = 3'$ $\quad$ donc $\quad K = -6 \quad K' = 7 \quad R = -KI + I_A = 54'$

$K + K' = 1$ $\quad$ donc $\quad B_A - b_A = I_A + I_B - I = 1'$

$B_{0A} \leqslant B_A \leqslant B_{0A} + R - R0$ $\quad$ c'est-à-dire $\quad B_A = 4'$

$b_{0A} \leqslant b_A \leqslant b_{0A} + r - ro$ $\quad$ c'est-à-dire $\quad 3' \leqslant b_A \leqslant 7'$



Le graphique de la planche XI est caractérisé par les éléments suivants :

Nombre de voitures	$N = 12$	
Grand intervalle	$I = 8'$	
Révolution totale	$S = 96'$	$D = S - S0 = 4'$
Solution en dents de scie		
$I_A = 6'$	$i_A = I - I_A = 21$	
$I_B = 3'$	$i_C = I - I_B = 5'$	
Grande révolution	$R = 54'$	$K = -6$
Petite révolution	$r = S - R = 42'$	
$K' = 7$		
$B_A = 4'$		
$b_A = 3'$		
$B_B = R - T - B_A = 54 - 47 - 4 = 3'$		
$b_C = r - t - b_A = 48 - 32 - 3 = 7'$		

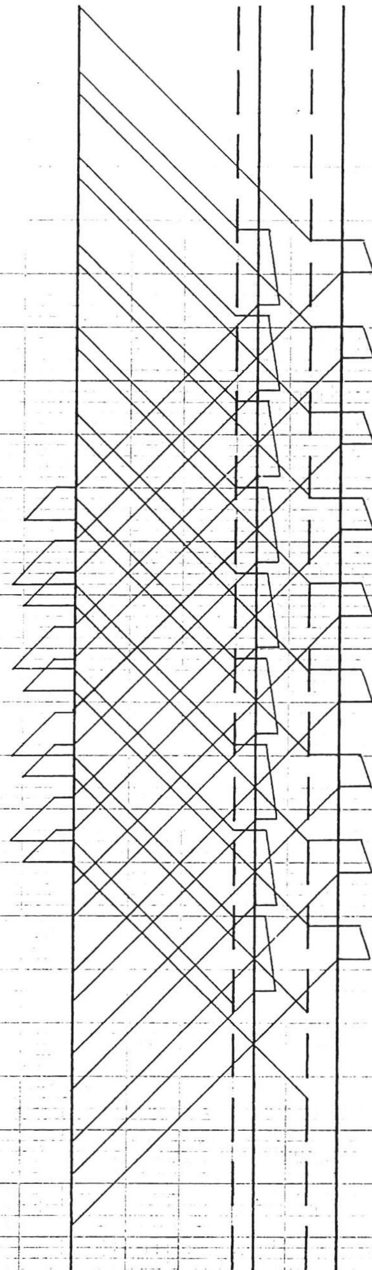


PLANCHE XI

10/ Solutions dégradées

Que faire alors si, avec N_1 , S , I définis selon les critères " meilleur service au moindre coût " exposés plus haut, aucune solution en voitures indépendantes - ou à défaut en dents de scie - ne conduit à des solutions en (I_A , I_B) satisfaisantes ?

On a vu que, dans le cas où il existe $N_2 = N_1 + 1$ dans une suite Ni de nombre de voitures conduisant au mieux au même intervalle I , choisir N_2 au lieu de N_1 conduit toujours à des solutions satisfaisantes, puisqu'on peut alors choisir n'importe quelles valeurs de I_A et I_B dans l'intervalle [0 , I [. Ce type de solution coûte donc une voiture. Par ailleurs, elle n'est possible dans le cadre de nos critères que s'il existe effectivement N_2 , ce qui n'est toujours le cas dans notre exemple qu'au delà de 13 voitures.

Mais rien n'interdit, même si N' = N + 1 correspond selon nos critères à des solutions en I' = I - 1, de choisir une solution

en $\quad N' = N + 1 \qquad I' = I \qquad S = (N + 1)\ I$

Tout se passe alors comme si cette solution était une solution en N_2 de la solution en N_1 = N puisque S - S = I et donc D' - D = I

On peut donc dans tous les cas trouver des solutions satisfaisantes en (I_A , I_B) en voitures indépendantes ou en dents de scie, en rajoutant une voiture.

Ainsi, dans nos exemples avec S0 = 89' et (R0 , ro) = (47 , 42), il n'existe pas de solution en voitures indépendantes pour 9 voitures avec l'intervalle minimal de 10' . Il n'en existe d'ailleurs pas non plus avec 10 voitures et l'intervalle minimal de 9'.

Par contre, avec 10 voitures et un intervalle de 10' , on a S = 100' et D = 11' , et des solutions en voitures indépendantes pour (R , r) = (50, 50) nécessairement satisfaisantes puisque $D < I$.

En revanche, s'il n'existe pas de solution en voitures indépendantes avec N = 7 voitures, une voiture de plus permet a priori de trouver des solutions satisfaisantes avec un intervalle diminué en outre d'une minute, et un résultat respectant les critères de " meilleur service au moindre coût ".

Chaque cas est donc à discuter individuellement dans le cadre du tableau 3 , et des solutions possibles en (I_A , I_B) dans les cas où $D < I$.

Sur un autre plan, que se passe-t-il si on dégrade l'intervalle, c'est-à-dire si au lieu de choisir avec un nombre de voitures N

$$S \text{ et } I \quad \text{tels que} \quad S = NI \geqslant S0 \quad \text{et} \quad N (I - 1) < S0$$

on choisit $I' = I + 1$ et $S = N (I + 1)$

Tout se passe alors comme si, en posant $N - 1 = N_1$, cette solution était la solution en N_2 correspondante, à condition qu'on ait bien (1) $I [N - 1] = I [N] + 1$, ce qui dans notre exemple n'est pas vérifié au-dessus de 9 voitures.

Mais si $N - 1 = N_n$ avec $n > 1$, on peut éventuellement trouver des solutions encore plus économiques pour un même intervalle I. On doit donc explorer en priorité la solution en $N_1 [I - 1]$, qui n'est pas nécessairement satisfaisante, puis la solution en N_2, qui elle le sera nécessairement.

Dans le cas où $I [N - 1] > I [N] + 1$, ce qui est toujours le cas dans notre exemple avec moins de 8 voitures, on examinera en priorité le choix de $I' = I [N] + 1$.

Par exemple ici avec $N = 9$ voitures $I' = 11'$ $S = 99'$ et $D' = 10'$ comme $D' < I'$ rien ne permet d'affirmer qu'on trouvera des solutions satisfaisantes ; dans le cas contraire on réitérera l'opération jusqu'à $I'' = I [N - 1]$ qui vérifie bien $D'' > I''$ puisque

$$D'' = N I [N - 1] - S0$$

$$\text{et} \quad (N - 1) I [N - 1] \geqslant 0$$

$$\text{d'où} \quad N I [N - 1] - S0 \geqslant I [N - 1]$$

$$\text{et} \quad D'' \geqslant I''$$

par ailleurs $D'' = I''$ c'est-à-dire $NI [N - 1] - S0 = I [N - 1]$

$$(N - 1) (i [N - 1]) = SO$$

n'est jamais vérifié puisque $(N - 1) (i [N - 1] + 1) < 0$

---

(1) *I [N] et I [N - 1] désignent par la suite les intervalles I correspondant à des valeurs de N telles que les couples I , N respectent bien le critère d'optimisation du nombre de voitures.*

En conséquence, il est également toujours possible de trouver des solutions satisfaisantes en (I_A , I_B) , en voitures indépendantes ou en dents de scie, en dégradant l'intervalle.

Naturellement quand on s'oriente vers une solution " dégradée " , il est primordial de comparer l'efficacité de cette solution avec celle de solutions à répartition inégale de niveau de service entre les deux types de course, selon les critères d'opportunité définis au chapitre 5/ , et en particulier avec la solution " sans demi-tour ". Mais, il est a priori tout à fait possible que cette solution dégradée soit à ce titre satisfaisante.

11/ Lignes à 2 antennes

La plupart des développements précédents s'appliquent dans le cas d'une ligne d'autobus à 2 antennes.

Pour des temps de révolution minima donnés sur chaque antenne, et un nombre de voitures donné, on peut en effet déterminer une solution en I respectant le critère d'optimisation de l'intervalle. On peut s'en tenir au nombre de voitures N_I respectant pour cet intervalle I le critère d'optimisation du nombre de voitures. On peut rechercher des solutions en (I_A , I_B) en voitures indépendantes ou, à défaut, en dents de scie.

On peut, le cas échéant, majorer le nombre de voitures ou dégrader l'intervalle I pour obtenir une solution satisfaisante en (I_A , I_B), c'est-à-dire le plus souvent, pour les lignes à antennes, une solution en $I_A = I_B = \frac{I}{2}$

On peut enfin, si on veut utiliser absolument le nombre de voitures donné au départ, rechercher des solutions avec répartition inégale du niveau de service.

Dans le cas d'une ligne à antennes, le développement du chapitre 5, relatif au critère d'opportunité d'organisation de demi-tours, n'est pas directement transposable. En revanche, on peut se demander s'il y a vraiment intérêt à graphiquer ensemble les deux antennes de la ligne, ou s'il ne serait pas plus simple, ou préférable, de les graphiquer comme deux lignes indépendantes.

Une recherche serait à mener pour la détermination systématique des différentes répartitions possibles du nombre de voitures entre les deux lignes indépendantes, permettant d'améliorer globalement l'efficacité du service.

Cette recherche s'appuirait sur les mêmes bases que celle évoquée dans la remarque qui clôt le chapitre 5, et qui paraît en définitive assez simple.

ANNEXE : Programme " GRAPH "

Ce programme a été réalisé sur un micro-ordinateur HP-85. Il permet de déterminer rapidement, pour une ligne à terminus partiel ou à deux antennes, à partir des données de temps de parcours et de temps de battement minima, les solutions possibles en fonction du nombre de voitures ou du grand intervalle choisis.

Il oriente automatiquement vers les solutions répondant au critère d'optimisation du nombre de voitures.

Dans le cas d'une ligne à antennes, il permet de juger de l'opportunité d'organiser des demi-tours.

Une fois choisis et validés les paramètres d'intervalle et de battement, il fournit une ébauche de tracé du graphique obtenu.

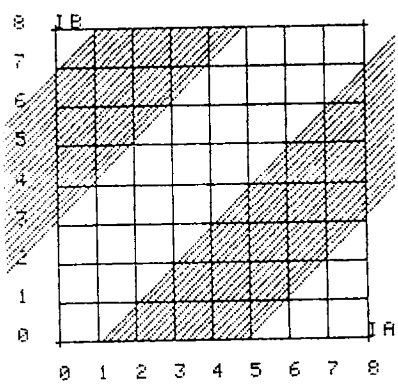
Le programme " GRAPH " reste naturellement très simple, et n'a comme prétention que celle d'ébaucher une des fonctions d'assistance possibles en matière de tracé automatique de graphiques ; cette fonction devrait d'ailleurs s'étendre aux cas des solutions à répartition inégale de niveau de service évoquées dans la note précédente, ainsi qu'aux lignes à plus d'un terminus intermédiaire (ou à plus de deux antennes).

LIGNE AVEC TERMINUS PARTIEL

T PARCOURS	T.BATT.MINI
TAB= 22	B0B= 3
TBA= 25	B0A= 4
tAC= 15	b0C= 3
tCA= 17	b0A= 3

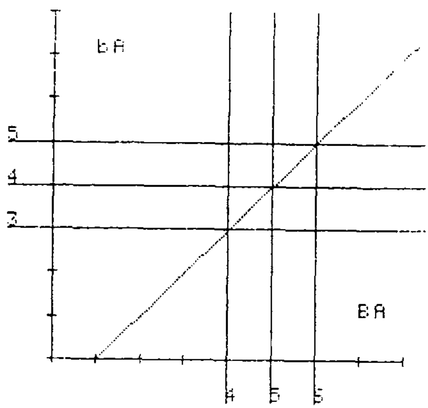
N	I	D
1	92	0
2	46	0
3	31	1
4	23	0
5	19	3
6	16	4
7	14	6
8	12	4
9	11	7
10	10	8
11	9	7
12	8	4
13	8	12
14	7	6
15	7	13
16	6	4
17	6	10
18	6	16
19	5	3
20	5	8
21	5	13
22	5	18
23	4	0
24	4	4
25	4	8
26	4	12
27	4	16
28	4	20
29	4	24
30	4	28
31	3	1
32	3	4
33	3	7
34	3	10
35	3	13
36	3	16
37	3	19
38	3	22
39	3	25
40	3	28
41	3	31
42	3	34
43	3	37
44	3	40
45	3	43
46	2	0
47	2	2
48	2	4
49	2	6
50	2	8
51	2	10
52	2	12
53	2	14
54	2	16
55	2	18
56	2	20
57	2	22
58	2	24
59	2	26

```
AVEZ-VOUS FIXE
1-LE NOMBRE DE VOITURES
2-LE NIVEAU DE SERVICE
?

DE COMBIEN DE VOITURES DIPOSEZ-V
OUS?
12
VOUS POUVEZ GRAPHIQUER AVEC TERM
INUS PARTIEL AVEC UN INTERVALLE
DE 8 MN
IL VOUS RESTERA UN BATTEMENT IMP
RODUCTIF DE 4 MN
VOTRE TEMPS DE REVOLUTION TOTAL
EST DE 96 MN
IL Y A DES SOLUTIONS EN VOITURES
 INDEPENDANTES
VOULEZ-VOUS VOIR LE SCHEMA DES V
ALEURS LIMITES DE IA ET IB?
```




```
Y-A-T'IL DES VALEURS DE IA ET IB
 QUI VOUS CONVIENNENT?
1
RENTREZ IA ET IB
?
4,5
VALEURS CORRECTES
```

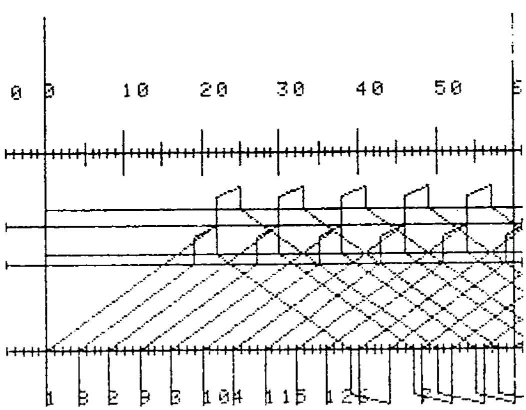
```
VOULEZ-VOUS VOIR LE SCHEMA DES V
ALEURS AUTORISEES POUR BA ET bA

1
```



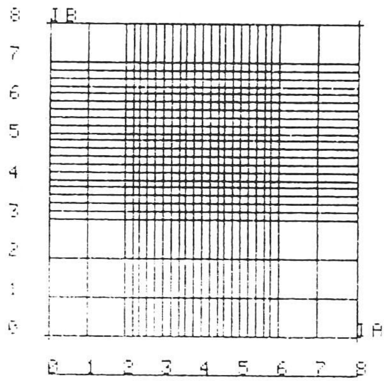

```
CHOISISSEZ DES VALEURS POUR
BA ET bA
?
6,5
VALEURS AUTORISEES
VOUS POUVEZ COMMENCER LE GRAPHIQ
UE
RAPPEL DES PRINCIPAUX ELEMENTS
NOMBRE DE VOITURES= 12
INTERVALLES          BATTEMENTS
IA= 4                BB= 3
IB= 5                BA= 6
iA= 4                bC= 3
iC= 3                bA= 5
IMPRESSION DES RESULTATS ET TRAC
E DU GRAPHIQUE?
```

12 VOITURES EN SERVICE
GRAPHIQUE EN VOITURES INDEPENDAN
TES
TEMPS DE REVOLUTION
R= 56
r= 40
INTERVALLES
IA= 4
IB= 5
iA= 4
iC= 3

BATTEMENTS
BB= 3
BA= 6
bC= 3
bA= 5

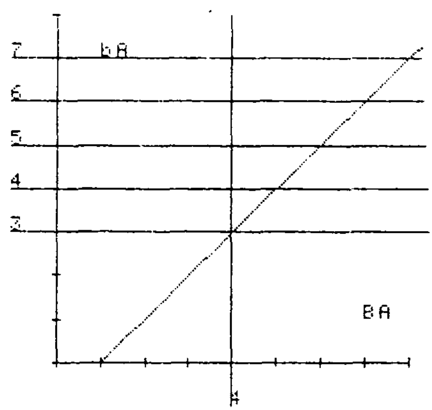


```
ON ESSAYE UNE SOLUTION EN DENTS
DE SCIE?
1
SOLUTIONS EN DENTS DE SCIE
VOULEZ-VOUS VOIR LE SCHEMA DES V
ALEURS LIMITES DE IA ET IB?
1
```




```
Y-A-T'IL DES VALEURS DE IA ET IB
 QUI VOUS CONVIENNENT?
1
RENTREZ IA ET IB
?
6,3
VALEURS AUTORISEES
```

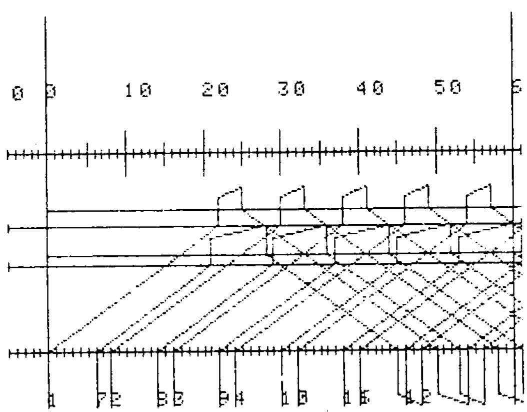
```
VOULEZ-VOUS VOIR LE SCHEMA DES V
ALEURS POSSIBLES POUR BA ET bA?
1
```



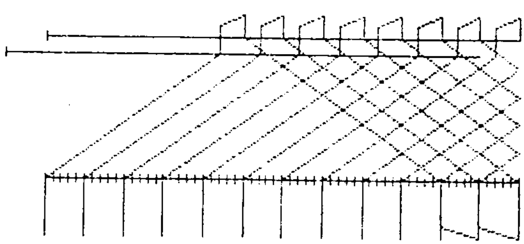

```
CHOISISSEZ DES VALEURS POUR
BA ET bA
?
4,3
VALEURS AUTORISEES
VOUS POUVEZ COMMENCER LE GRAPH..
UE
RAPPEL DES PRINCIPAUX ELEMENTS
NOMBRE DE VOITURES= 12
INTERVALLES              BATTEMENTS
IA= 6                    BB= 3
IB= 3                    BA= 4
iA= 2                    bC= 7
iC= 5                    bA= 3
IMPRESSION DES RESULTATS ET TRAC
E DU GRAPHIQUE?
```

12 VOITURES EN SERVICE
GRAPHIQUE EN DENTS DE SCIE
TEMPS DE REVOLUTION TOTAL= 96

INTERVALLES	BATTEMENTS
IA= 6	BB= 3
IB= 3	BA= 4
iA= 2	bC= 7
iC= 5	bA= 3



```
VOULEZ-VOUS VOIR CE QUE DONNERAI
T UN GRAPHIQUE AVEC 12
VOITURES SANS PARTIELS?
1
VOUS POUVEZ GRAPHIQUER SANS PART
IELS AVEC UN INTERVALLE MINI DE
 5 MN
MAIS VOUS OBTIENDREZ LE MEME INT
ERVALLE AVEC 11
VOITURES SEULEMENT
IL VOUS RESTERA UN BATTEMENT IMP
RODUCTIF DE 1 MN
VOTRE TEMPS DE REVOLUTION EST DE
 55 MN
TRACE DU GRAPHIQUE?

1
VALEURS DE BA ET BB?
5,3


 12 VOITURES DISPONIBLES
 11 VOITURES UTILISEES SEULEMENT
GRAPHIQUE SANS PARTIELS
TEMPS DE REVOLUTION= 55 MN
INTERVALLE= 5 MN
BATTEMENTS:
BA= 5                     BB= 3
```



```
LE NIVEAU DE SERVICE EST DONC ME
ILLEUR EN ORGANISANT DES PARTIEL
S
VOULEZ-VOUS ESSAYER AVEC UN NOMB
RE DE VOITURES DIFFERENT?
0
VOULEZ-VOUS ESSAYER AVEC UN GRAN
D INTERVALLE DIFFERENT?
0
TEMPS DE BATTEMENT MINI DIFFEREN
TS?
0
```